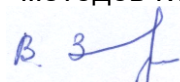


МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО ВГУ)

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
алгебры и математических
методов гидродинамики

 (Звягин В.Г.)
подпись, расшифровка подписи
18.03.2025 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.ДВ.01.02 Применение многозначных отображений в математической экономике

1. Код и наименование направления подготовки:

01.03.01 Математика

2. Профиль подготовки: Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

3. Квалификация выпускника: Бакалавр

4. Форма обучения: Очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: Кафедра алгебры математических методов гидродинамики

6. Составители программы: доцент, к.ф.-м.н. Турбин Михаил Вячеславович

7. Рекомендована: НМС математического факультета протокол № 0500-03 от 18.03.2025 г.

8. Учебный год: 2027-2028

Семестр(ы): 6

9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Целью курса является освоение основных понятий и фактов теории многозначных отображений и формирование способности применения полученных знаний и навыков для решения задач математической экономики.

Задачи изучения дисциплины

- ознакомление многозначными отображениями и основными математическими моделями экономики
- овладение основными методами решения задач
- выработка навыков и умений по применению полученных знаний при решении других математических задач

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: относится к части, формируемой участниками образовательных отношений Блока 1. дисциплин по выбору

Для его успешного освоения необходимы знания и умения, приобретенные в результате обучения по предшествующим дисциплинам: математический анализ, функциональный анализ, действительный анализ.

Студент должен свободно владеть математическим анализом, элементами действительного анализа, обладать полными знаниями функционального анализа.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ПК-1	Способность сбора, обработки, анализа и исследований в области уравнений в частных производных и уравнений математической физики	ПК-1.1	Выбирает и анализирует информацию с целью составления адекватной математической модели изучаемого объекта	Знать: зарубежную и отечественную литературу в предметной области Уметь: работать с различными источниками научной информации, составлять математические модели различных процессов Владеть: источниками информации, навыками работы с литературой, информационными системами
		ПК-1.2	Применяет классические методы исследования математических моделей в области уравнений в частных производных и уравнений математической физики	Знать: концептуальные основы методов исследования математических моделей в предметной области; основные методы доказательства математических утверждений в области уравнений в частных производных и математической физики Уметь: формулировать постановки основных задач математической физики, в том числе в n -мерных линейных пространствах; формулировать и доказывать теоремы существования, единственности, корректной постановки задач для дифференциальных уравнений Владеть: теоретическими подходами к исследованию математических моделей в области уравнений с частными производными; навыками работы в информационных современных системах
		ПК-1.3	Использует методы исследования уравнений в частных производных и уравнений	Знать: различные методы исследования разрешимости математических моделей Уметь: выделять качественные

			математической физики с целью анализа качественных свойств решений составленных математических моделей	свойства решений математических моделей Владеть: методами самостоятельного обучения новым знаниям и способами их применения к исследованию решений задачи и анализу качественных свойств
--	--	--	--	---

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. — 2/72.

Форма промежуточной аттестации: зачёт

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость	
	Всего	По семестрам
		6
Аудиторные занятия	32	32
в том числе: лекции	16	16
практические	16	16
лабораторные	-	-
Самостоятельная работа	40	40
Итого:	72	72

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
1. Лекции			
1.1	Мультиотображения	Многозначные функции. Понятие многозначной функции, примеры многозначных функций в различных разделах математики (теории оптимального управления, математической экономике, теории игр, приближенных вычислений, метрическом анализе, дифференциальных уравнениях с разрывной правой частью, дифференциальных неравенствах). Многозначные отображения. Полунепрерывные сверху и снизу многозначные отображения, их свойства. Теоретико-множественные операции над многозначными отображениями	
1.2	Непрерывность мультиотображений	Непрерывные и измеримые многозначные отображения. Метрика Хаусдорфа. Многозначные отображения с компактными и выпуклыми значениями. Свойства метрической проекции на выпуклое, компактное множество. Селекторы многозначных отображений. Существование непрерывных и измеримых селекторов у непрерывных и измеримых многозначных отображений. Контрпримеры	
1.3	Неподвижные точки мультиотображений	Неподвижные точки многозначных отображений. Теорема Банаха и Какутани	
1.4	Дифференциальные включения	Многозначный интегральный оператор и его свойства Теорема существования решения дифференциального включения. Лемма А.Ф.Филиппова о неявной функции и ее применение в теории управляемых систем	
2. Практические занятия			
2.1	Мультиотображения	Примеры многозначных функций в различных разделах математики (теории оптимального управления,	

		математической экономике, теории игр, приближенных вычислений, метрическом анализе, дифференциальных уравнениях с разрывной правой частью, дифференциальных неравенствах). Примеры полунепрерывных сверху и снизу многозначных отображений, их свойства.	
2.2	Непрерывность мультиотображений	Свойства метрической проекции на выпуклое, компактное множество. Существование непрерывных и измеримых селекторов у непрерывных и измеримых многозначных отображений. Контрпримеры.	
2.3	Неподвижные точки мультиотображений	Примеры неподвижных точек многозначных отображений. Изучение связи принципа неподвижной точки в различных разделах математики.	
2.4	Дифференциальные включения	Примеры многозначного интегрального оператора. Пример применения леммы Филиппова о неявной функции в теории управляемых систем.	

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1.1	Мультиотображения	4	4	-	10	18
1.2	Непрерывность мультиотображений	4	4	-	10	18
1.3	Неподвижные точки мультиотображений	4	4	-	10	18
1.4	Дифференциальные включения	4	4	-	10	18
	Итого:	16	16	-	40	72

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, практические занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся, на которую отводится 40 часов. Самостоятельная учебная деятельность студентов по дисциплине «Применение многозначных отображений в математической экономике» предполагает изучение рекомендуемой преподавателем литературы по вопросам практических занятий, самостоятельное освоение понятийного аппарата и подготовку к текущим аттестациям (контрольной работе и выполнению практических заданий). На лекциях рассказывается теоретический материал, на практических занятиях решаются примеры по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях.

При изучении курса «Применение многозначных отображений в математической экономике» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Вопросы аудиторных занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к зачёту.

Все выполняемые студентами самостоятельно задания (выполнение контрольной работы) подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации (зачёта). Для понимания и качественного усвоения предмета рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, рассмотренные на лекции. Перед следующей лекцией обязательно повторить материал предыдущей лекции.

2. Перед практическим занятием обязательно повторить лекционный материал. После практического занятия еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры. Если при решении примеров возникнут вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в присутственный час преподавателю.

3. При подготовке к практическим занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.

4. Кроме обычного курса в системе «Электронный университет», все необходимые для усвоения курса материалы размещены также на сайте факультета https://math.vsu.ru/wp/?page_id=937

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. 2-ое изд. М.: Книжный дом «Либроком». 2011.
2	Арутюнов А.В. лекции по выпуклому и многозначному анализу. Физматлит, 2014, 184,с. http://www.studentlibrary.ru , http://bookoteka.ru/24235.html

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
3	Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.М., Обуховский В.В. Многозначные отображения. Итоги науки и техники. Математический анализ. Т.19, 1982
4	Обен Ж.-П., Экленд И. Прикладной нелинейный анализ. М., Мир, 1988
5	Финогенко И.А. Иллюстрированные примеры к теории множественных пространств и топологии. Метод. указания. Иркутск, ИГУ, 1990
6	Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., Наука, 1985.
7	Толстоногов А.А., Финогенко И.А. О решениях дифференциального фключения с полунепрерывной снизу невыпуклой правой частью в банаховом пространстве. Матем. сб. 1984. Т. 125 (167), N 2 (10), с. 199-230
8	Шварц Л. Анализ. Т. 1, М., Мир, 1972
9	Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М., Наука, 1988.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)*:

№ п/п	Ресурс
10	http://www.lib.vsu.ru - электронный каталог ЗНБ ВГУ
11	ЭБС «Университетская библиотека онлайн»
12	https://math.vsu.ru/wp/?page_id=937 – Сайт факультета

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. 2-ое изд. М.: Книжный дом «Либроком». 2011.
2	Арутюнов А.В. лекции по выпуклому и многозначному анализу. Физматлит, 2014, 184 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=59691 http://bookoteka.ru/24235.html
3	Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.М., Обуховский В.В. Многозначные отображения. Итоги науки и техники. Математический анализ. Т.19, 1982
4	Обен Ж.-П., Экленд И. Прикладной нелинейный анализ. М., Мир, 1988
5	Финогенко И.А. Иллюстрированные примеры к теории множественных пространств и топологии. Метод. указания. Иркутск, ИГУ, 1990
6	Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., Наука, 1985.
7	Толстоногов А.А., Финогенко И.А. О решениях дифференциального фключения с полунепрерывной снизу невыпуклой правой частью в банаховом пространстве.

	Матем. сб. 1984. Т. 125 (167), N 2 (10), с. 199-230
8	Шварц Л. Анализ. Т. 1, М., Мир, 1972
9	Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М., Наука, 1988.
10	Положение об организации самостоятельной работы обучающихся в Воронежском государственном университете

17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий.

Перечень необходимого программного обеспечения: операционная система Windows или Linux, Microsoft, Windows Office, LibreOffice 5, Calc, Math, браузер Mozilla Firefox, Opera или Internet.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Специализированная мебель.

Для самостоятельной работы используется класс с компьютерной техникой, оснащенный необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть.

При реализации дисциплины с использованием дистанционного образования возможны дополнения материально-технического обеспечения дисциплины.

19. Фонд оценочных средств:

Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1	Мультиотображения	ПК-1	ПК-1.2	Домашние задания, контрольная работа
2	Непрерывность мультиотображений	ПК-1	ПК-1.1, ПК-1.2	Домашние задания, контрольная работа
3	Неподвижные точки мультиотображений	ПК-1	ПК-1.1, ПК-1.2, ПК-1.3	Домашние задания, контрольная работа
4	Дифференциальные включения	ПК-1	ПК-1.1, ПК-1.2	Домашние задания, контрольная работа
Промежуточная аттестация Форма контроля - зачёт		Зачёт выставляется при успешной сдаче контрольной работы		

20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1. Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Домашние задания:

По теме 1. Мультиотображения

Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. 2-ое изд. М.: Книжный дом «Либроком». 2011.

Задание:

Привести примеры конкретных многозначных отображений, которые являются

А) Полунепрерывными сверху.

Б) Полунепрерывными снизу.

В) Непрерывными.

Г) Замкнутыми.

По теме 2. Непрерывность мультиотображений

Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. 2-ое изд. М.: Книжный дом «Либроком». 2011.

Задание:

Доказать теорему: Многозначное отображение F , действующее из метрического пространства X в $K(Y)$ непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно в метрике Хаусдорфа.

По теме 3 Неподвижные точки мультиотображений

Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. 2-ое изд. М.: Книжный дом «Либроком». 2011.

Задание:

1. Привести примеры несуществования непрерывных сечений многозначных отображений. Привести примеры эpsilon аппроксимаций для конкретных многозначных отображений.

2. Привести примеры сжимающий многозначных отображений, имеющих много неподвижных точек (в отличие от однозначного случая, где неподвижная точка единственна).

По теме 4. Дифференциальные включения

Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. 2-ое изд. М.: Книжный дом «Либроком». 2011.

Задания:

Привести примеры многозначных векторных полей, для которых выполнены условия

1. Аналога теоремы Руше.
2. Аналога теоремы Пуакаре-Боля.
3. Теоремы Какутани.

Примерный перечень задач для контрольной работы:

Контрольно-измерительный материал № 1.

1. Понятие многозначной функции.
2. Селекторы многозначных отображений.

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического и практического характера, регулярно осуществляемую на занятиях.

Цель текущего контроля:

1. определение уровня сформированности профессиональных компетенций, знаний и навыков деятельности в области знаний, излагаемых в курсе.

Задачи текущего контроля: провести оценивание

1. уровня освоения теоретических и практических понятий, научных основ профессиональной деятельности;
2. степени готовности обучающегося применять теоретические и практические знания и профессионально значимую информацию, сформированности когнитивных умений.
3. приобретенных умений, профессионально значимых для профессиональной деятельности.

Текущий контроль предназначен для проверки хода и качества формирования компетенций, стимулирования учебной работы обучаемых и совершенствования методики освоения новых знаний. Он обеспечивается проведением контрольной работы. В ходе контрольной работы обучающемуся выдается КИМ с перечнем заданий и предлагается выполнить данные задания. В ходе выполнения заданий нельзя пользоваться литературой и конспектом лекций, ограничение по времени 90 минут.

Если текущая аттестация проводится в дистанционном формате, то обучающийся должен иметь компьютер и доступ в систему «Электронный университет». Если у обучающегося отсутствует необходимое оборудование или доступ в систему, то он обязан сообщить преподавателю об этом за 2 рабочих дня. На контрольную работу в дистанционном режиме отводится ограничение по времени 100 минут.

Для оценивания результатов каждой контрольной работы используется **шкала**: «зачтено», «не зачтено».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения показаны в следующей таблице:

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
При выполнении контрольной работы студент продемонстрировал в достаточной мере: умение использовать стандартные пакеты программного обеспечения для решения типовых математических задач, владение навыками хранения, поиска, сбора, систематизации, обработки и использования информации.	Достаточный уровень	Зачтено
При выполнении контрольной работы студент не продемонстрировал в достаточной мере: умение использовать стандартные пакеты программного обеспечения для решения типовых математических задач, владение навыками хранения, поиска, сбора, систематизации, обработки и использования информации.	–	Не зачтено

20.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины. Промежуточная аттестация по дисциплине «Введение в многозначный анализ» проводится в форме зачёта. Предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины.

Промежуточная аттестация, как правило, осуществляется в конце семестра. Результаты текущей аттестации обучающегося по решению кафедры могут быть учтены при проведении промежуточной аттестации. При несогласии студента, ему дается возможность пройти промежуточную аттестацию (без учета его текущих аттестаций) на общих основаниях.

При проведении экзамена учитываются результаты контрольной работы и учитывается выставленная преподавателем оценка за работу в ходе практических занятий.

Если у обучающегося есть положительная оценка по контрольной работе и положительная оценка работы в ходе обучения по практике, то выставляется зачёт. Если обучающийся не имеет положительной оценки контрольной работе или практике, или не согласен с этой оценкой, он может ответить на соответствующие вопросы в ходе зачёта.

Примерный перечень вопросов:

1	Понятие мультиотображения. Возникновение мультиотображений в различных областях математики
2	Измеримые мультифункции. Теорема об измеримых мультифункциях. Многозначный интеграл
3	Полунепрерывные снизу мультиотображения. Условия полунепрерывности снизу. Примеры. Непрерывные мультиотображения

4	Полунепрерывные сверху мультиотображения. Условия полунепрерывности сверху. Примеры
5	Теорема Филиппова
6	Суперпозиционная измеримость
7	Замкнутые мультиотображения. Условия замкнутости. Взаимосвязь замкнутых и полунепрерывных сверху мультиотображений
8	Теорема Кастена об измеримом сечении
9	Топологические свойства замкнутых и полунепрерывных сверху мультиотображений
10	Конструкция топологической степени мультиотображения
11	Основные свойства топологической степени мультиотображения
12	Основные теоремы о неподвижной точке мультиотображения
13	Операции объединения и пересечения мультиотображений и их свойства
14	Теорема максимума
15	Композиция мультиотображений. Свойство непрерывности композиции
16	Операции суммы и произведения мультиотображения на функцию и их свойства непрерывности

Описание критериев и шкалы оценивания компетенций (результатов обучения) при промежуточной аттестации

Критерии оценивания компетенций	Шкала оценок
Для получения зачета по курсу необходимо знать основные понятия курса и владеть методами решения типовых задач; иметь конспект всех решенных задач практических занятий.	Зачтено
Если не выполнено, по крайней мере, одной из условий зачета	Не зачтено

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

1. Множество $F_+^{-1}(D) = \{x \mid x \in X, F(x) \subset D\}$, где $D \subset Y$ называется

- а) малым прообразом
- б) полным прообразом

Ответ: а)

2. Множество $F_-^{-1}(D) = \{x \mid x \in X, F(x) \cap D \neq \emptyset\}$, где $D \subset Y$ называется

- а) малым прообразом
- б) полным прообразом

Ответ: б)

3. Пусть $F_0, F_1 : X \rightarrow P(Y)$ - мультиотображения. Мультиотображение $F_0 \cup F_1 : X \rightarrow P(Y), (F_0 \cup F_1)(x) = F_0(x) \cup F_1(x)$ называется ... мультиотображения.

- а) объединением
- б) пересечением

Ответ: а)

4. Пусть $F_0, F_1 : X \rightarrow P(Y)$ - мультиотображения, причем $F_0(x) \cap F_1(x) \neq \emptyset, \forall (x \in X)$. Мультиотображение $F_0 \cap F_1 : X \rightarrow P(Y), (F_0 \cap F_1)(x) = F_0(x) \cap F_1(x)$ называется ... мультиотображения.

- а) объединением
- б) пересечением

Ответ: б)

5. Мультиотображение F называется ... , если его график есть замкнутое множество в пространстве $X \times Y$.

- а) замкнутым
- б) открытым

Ответ: а)

6. Мультиотображение F называется ... в точке $x \in X$, если для любого открытого множества $V \subset Y$ такого, что $F(x) \cap V \neq \emptyset$, найдется окрестность $U(x)$ точки x такая, что $F(x') \cap V \neq \emptyset, \forall (x' \in X)$.

Ответ: полунепрерывным снизу

7. Мультиотображение F называется ..., если оно полунепрерывно снизу в каждой точке.

Ответ: полунепрерывным снизу.

8. 8. Мультиотображение F называется ... в точке $x \in X$, если для любого открытого множества $V \subset Y$ такого, что $F(x) \subset V$, найдется окрестность $U(x)$ точки x такая, что $F(U(x)) \subset V$.

Ответ: полунепрерывным сверху

9. Мультиотображение F называется ..., если оно полунепрерывно сверху в каждой точке.

Ответ: полунепрерывным сверху.

Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

1) Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

2) Задания открытого типа (короткий текст):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

3) Задания открытого типа (число):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).

Программа рекомендована НМС математического факультета протокол № 0500-03 от 18.03.2025 г.